Sea B la fórmula **$\exists x \forall y$ ($x \cdot y = a$)** de un lenguaje de primer orden. Sea **i**, la interpretación sobre el dominio de los números naturales (positivos y el cero), con $\cdot$ el producto ordinario. Indicar si las siguientes afirmaciones son correctas o no. Justifica la respuesta en todos los casos

a) La interpretación **i** con i(a) = 1 es modelo de la fórmula

b) No existe interpretación que sea modelo de B

c) El sistema de deducción natural es completo porque toda fórmula bien formada puede deducirse en él

---

a) INCORRECTO. No existe ningún número que multiplicado por cualquier número siempre sea igual a 1.

b) INCORRECTO. La interpretación i con i(a) = 0 es modelo, ya que el 0 multiplicado por cualquier número es igual a 0.

c) INCORRECTO. Es completo porque toda fórmula válida puede deducirse en él.

Construir un modelo y un contramodelo de la siguiente fórmula sobre el dominio {1,2,3}:

$$\exists x \neg Q(f(x)) \wedge \neg \exists z(\forall y P(z,y) \rightarrow Q(f(z)))$$

Definimos un interpretación I(D, i()) en el dominio {1,2,3}

Tendremos tres constantes en el lenguaje de primer orden que utlizaremos L={a,b,c}

Definimos la función de interpretación i()

Función de interpretación para las constantes:

i(a)=1, i(b)=2, i(c)=3

Función de interpretación para las funciones:

i(f(a))=a, i(f(b))=b, i(f(c))=c

Función de interpretación para los predicados:

i(Q(a)) = , i(Q(b)) = , i(Q(c))=

i(P(a,a)) = , i(P(a,b)) = , i(P(a,c)) =

i(P(b,a)) = , i(P(b,b)) = , i(P(b,c)) =

i(P(c,a)) = , i(P(c,b)) = , i(P(c,c)) =

Buscamos un **Modelo**, una interpretación que haga verdadera la fórmula:

$$i(\exists x \neg Q(f(x))) \wedge \neg \exists z(\forall y P(z,y) \rightarrow Q(f(z)))) = V$$

sii

$i(\exists x \neg Q(f(x))) = V$ **y** $i(\neg \exists z(\forall y P(z,y) \rightarrow Q(f(z)))) = V$

$i(\exists x \neg Q(f(x))) = V$ sii

z=a $i(\neg Q(f(a))) = V$ sii $\mathbf{i(Q(f(a))) = F}$

o bien

z=b $i(\neg Q(f(b))) = V$ sii $\mathbf{i(Q(f(b))) = F}$

o bien

z=c   i(¬Q(f(c))) = V sii **i(Q(f(c))) = F**

i(¬∃z(∀yP(z,y) → Q(f(z)))) = V sii ∃z(∀yP(z,y) → Q(f(z))) = F

z=a   i(∀yP(a,y) → Q(f(a))) = F sii

i(∀yP(a,y)) = V   y   **i(Q(f(a))) = F**

i(P(a,a))=V

y **i(P(a,b))=V**

y **i(P(a,c))=V**

y

z=b   i(∀yP(b,y) → Q(f(b))) = F sii

i(∀yP(b,y)) = V   y   **i(Q(f(b)) = F**

i(P(b,a))=V

y **i(P(b,b))=V**

y **i(P(b,c))=V**

y

z=c   i(∀yP(b,y) → Q(f(b))) = F sii

i(∀yP(c,y)) = V   y   **i(Q(f(c))) = F**

i(P(c,a))=V

y **i(P(c,b))=V**

y **i(P(c,c))=V**

Modelo: i(Q(a)) = F, i(Q(b)) = F, i(Q(c))= F, i(P(a,a)) = V, i(P(a,b)) = V, i(P(a,c)) = V, i(P(b,a)) = V, i(P(b,b)) = V, i(P(b,c)) = V, i(P(c,a)) = V, i(P(c,b)) = V, i(P(c,c)) = V

Contramodelo

Buscamos un **ContraModelo**, una interpretación que haga falsa la fórmula:

$i(\exists x \neg Q(f(x)) \wedge \neg\exists z(\forall y P(z,y) \rightarrow Q(f(z)))) = F$

sii

$i(\exists x \neg Q(f(x))) = F$ o bien $i(\neg\exists z(\forall y P(z,y) \rightarrow Q(f(z))))) = F$

$i(\exists z \neg Q(f(x))) = F$ sii

$z=a$ $i(\neg Q(f(a))) = F$ sii $i(Q(f(a))) = V$

y

$z=b$ $i(\neg Q(f(b))) = F$ sii $i(Q(f(v))) = V$

y

$z=c$ $i(\neg Q(f(c))) = F$ sii $i(Q(f(c))) = V$

Contramodelo: **i(Q(f(a))) = V, i(Q(f(b))) = V, i(Q(f(c))) = V**

Encontrar, si existen, un modelo y un contramodelo para cada una de las siguientes fórmulas:

1. $\forall x \forall z \, (p(a) \leftrightarrow (q(x, f(z)) \wedge q(f(x), z)))$

2. $\forall x \exists y \, s(y,x) \wedge \neg \exists x \exists y \, (\exists z \, (s(z,x) \wedge s(z,y)))$

3. $\forall x \forall y \, ((\neg p(x,y) \rightarrow q(y)) \wedge (p(x,y) \rightarrow r(y)))$

Se usará siempre los números naturales como dominio de las interpretaciones.

1. $\forall x \forall z \, (p(a) \leftrightarrow (q(x, f(z)) \wedge q(f(x), z)))$
   - modelo: basta definir p como un predicado que vale para todo número, y q como predicado que vale para toda pareja de números.
   - contramodelo: basta decir que I(a) = 0 y modificar p para que no valga en 0.
2. $\forall x \exists y \, s(y,x) \wedge \neg \exists x \exists y \, (\exists z \, (s(z,x) \wedge s(z,y)))$
   - modelo: no existe
   - contramodelo: una I donde s es falso siempre
3. $\forall x \forall y \, ((\neg p(x,y) \rightarrow q(y)) \wedge (p(x,y) \rightarrow r(y)))$
   - modelo: una interpretación donde q es falso siempre , p es verdadero siempre, r es verdadero siempre.
   - contramodelo: una interpretación donde q es verdadero siempre.

Defina *detalladamente* dos interpretaciones, ambas sobre el dominio { □, Δ }, una que verifique y otra que false la siguiente fórmula:

Algunos votantes no confían en Obama: $\exists x(V(x) \wedge \neg C(x,a))$

Dado que $L = \{a, V^1, C^2\}$ y $D = \{ □, Δ \}$, $L(D) = L \cup \{b\}$ — *Ampliación de L*

Sea $I_1 = \langle D, i() \rangle$

$i(a) = □$, $i(b) = Δ$

$i(V^1) = \{\langle □\rangle, \langle Δ\rangle\}$, $i(C^2) = \{\langle □,Δ\rangle, \langle Δ,□\rangle\}$

$i(\exists x(V(x) \wedge \neg C(x,a))) = V$ sii — *Análisis correcto de ∃*

$i(V(a) \wedge \neg C(a,a)) = V$ sii $i(V(a)) = V$ y $i(\neg C(a,a)) = V$

$i(V(a)) = V$ sii $\langle i(a)\rangle \in i(V^1)$; $\langle □\rangle \in \{\langle □\rangle, \langle Δ\rangle\}$

$i(\neg C(a,a)) = V$ sii $i(C(a,a)) = F$ sii $\langle i(a),i(a)\rangle \notin i(C^2)$; $\langle □,□\rangle \notin \{\langle □,Δ\rangle, \langle Δ,□\rangle\}$ — *Análisis detallado*

Queda demostrado que I_1 verifica la fórmula $\exists x(V(x) \wedge \neg C(x,a))$.

Sea $I_2 = \langle D, i'() \rangle$, siendo $i'()$ idéntica a $i()$ excepto en que $i'(V^1) = \varnothing$

$i(\exists x(V(x) \wedge \neg C(x,a))) = F$ sii

$i(V(a) \wedge \neg C(a,a)) = F$ sii $i(V(a)) = F$ o $i(\neg C(a,a)) = F$ — *Análisis correcto de ∃*

$i(V(a)) = F$ sii $\langle i(a)\rangle \notin i(V^1)$; $\langle □\rangle \notin \varnothing$

y

$i(V(b) \wedge \neg C(b,a)) = F$ sii $i(V(b)) = F$ o $i(\neg C(b,a)) = F$ — *Análisis detallado*

$i(V(b)) = F$ sii $\langle i(b)\rangle \notin i(V^1)$; $\langle Δ\rangle \notin \varnothing$

Queda demostrado que I_2 falsa la fórmula $\exists x(V(x) \wedge \neg C(x,a))$.

Sea L el lenguaje { R , a , b , c }, donde R(x,y) es un símbolo de predicado y a, b, c son constantes. Definir un contramodelo en un dominio de 3 elementos para demostrar lo siguiente:

$$\forall x \exists y\, R(x,f(y)) \nvDash \exists y \forall x\, R(x,f(y))$$

Justificar adecuadamente la respuesta con un análisis semántico.

$A \equiv \forall x \exists y\, R(x,f(y))$ $\qquad$ $B \equiv \exists y \forall x\, R(x,f(y))$

Hay que encontrar un contramodelo, es decir, una interpretación i tal que i(A) = V y i(B) = F

Probamos con dominio D = {a,b}, y $f: D \longrightarrow D$ la función identidad, $f(x) = x \quad \forall x$

Hay que determinar $R \subset D \times D$.

$I(B) = F \longrightarrow \exists y \forall x\, R(x,f(y)) = F \longrightarrow \neg(\exists y \forall x\, R(x,f(y))) = V \longrightarrow \forall y \exists x\, R(x,f(y)) = F$

$\longrightarrow \forall y \exists x\, R(x,y) = F$

y = a	$\exists x\, R(x,a) = F$	R(b,a) = F	por ejemplo	(1)
y = b	$\exists x\, R(x,b) = F$	R(a,b) = F	por ejemplo	(2)

$i(A) = V \longrightarrow \forall x \exists y\, R(x,f(y)) = V \longrightarrow \forall x \exists y\, R(x,y) = V$

x = a	$\exists y\, R(a,y) = V$	teniendo en cuenta (2)	R(a,a) = V
x = b	$\exists y\, R(b,y) = V$	teniendo en cuenta (1)	R(b,b) = V

Queda por tanto : R = { (a,a), (b,b) }

Definir un contramodelo para demostrar que la siguiente relación de consecuencia lógica no se verifica:

$$\{\ \forall x\,(P(x) \rightarrow R(x))\ ,\ \forall x\,(Q(x) \rightarrow R(x))\ ,\ P(a)\ ,\ Q(b)\ \} \models \exists x\,(P(x) \wedge Q(x))$$

$$\{\ \underbrace{\forall x\,(P(x) \rightarrow R(x))}_{A_1}\ ,\ \underbrace{\forall x\,(Q(x) \rightarrow R(x))}_{A_2}\ ,\ \underbrace{P(a)}_{A_3}\ ,\ \underbrace{Q(b)}_{A_4}\ \} \models \underbrace{\exists x\,(P(x) \wedge Q(x))}_{B}$$

- Buscamos una interpretación i tal que

$\forall x\,(P(x) \rightarrow R(x))$

$\forall x\,(Q(x) \rightarrow R(x))$ son V y $\exists x\,(P(x) \wedge Q(x))$ es F

$P(a)$

$Q(b)$

- Tomamos como dominio D = {a,b}

- $A_3 = V \longrightarrow \boxed{P(a)) = V}$
- $A_4 = V \longrightarrow \boxed{Q(b)) = V}$
- $A_1 \equiv \forall x\,(P(x) \rightarrow R(x)) = V$

$$x = a \quad \left.\begin{array}{l} P(a) \rightarrow R(a) = V \\ P(a) = V \end{array}\right\} \longrightarrow \boxed{R(a) = V}$$

$$x = b \quad P(b) \rightarrow R(b) = V \longrightarrow P(b) = F \ \text{ ó } \ R(b) = V \qquad (1)$$

- $A_2 \equiv \forall x\,(Q(x) \rightarrow R(x)) = V$

$x = a$ $\quad Q(a) \rightarrow R(a) = V$ se cumple pues $R(a) = V$

$$x = b \quad \left.\begin{array}{l} Q(b) \rightarrow R(b) = V \\ Q(b) = V \end{array}\right\} \longrightarrow \boxed{R(b) = V}$$

por tanto, (1) , A_1 es V para x = b, y por tanto A_1 es V

- $B \equiv \exists x\,(P(x) \wedge Q(x)) = F$ sii $\neg \exists x\,(P(x) \wedge Q(x)) = V$ sii $\forall x\,(\neg P(x) \vee \neg Q(x)) = V$

$x = a$ $\neg P(a) \vee \neg Q(a) = V \longrightarrow \neg Q(a) = V \longrightarrow \boxed{Q(a) = F}$

$P(a) = V \rightarrow \neg P(a) = F$

$x = b$ $\neg P(b) \vee \neg Q(b) = V \longrightarrow \neg P(b) = V \longrightarrow \boxed{P(b) = F}$

$Q(b) = V \rightarrow \neg Q(b) = F$

- Hemos encontrado un contramodelo: $P_D = \{a\}$ $Q_D = \{b\}$ $R_D = \{a,b\}$
  que además es el único contramodelo

Analizar si existe o no relación de consecuencia lógica en los siguientes esquemas de argumentación utilizando razonamiento semántico:

a) $\{\forall z \exists x P(x,z), \exists x P(x,a)\} \vDash \exists x \forall z P(x,z)$

b) $\{\forall x P(x) \rightarrow Q(c)\} \vDash \exists x (P(x) \rightarrow Q(c))$

Para comprobar si hay consecuencia lógica, comprobamos si existen contramodelos (que hagan verdaderas las premisas y falsa la conclusión) para cada una de las fórmulas.

a) $\{\forall z \exists x P(x,z), \exists x P(x,a)\} \vDash \exists x \forall z P(x,z)$

Premisas

$\forall z \exists x P(x,z) = V$

	z= a	$\exists x P(x,a)$ = V sii		
			x=a	**P(a,a)=V**
		o	x=b	P(b,a)=V
		o	x=c	P(c,a)=V
y	z= b	$\exists x P(x,b)$ = V sii		
			x=a	**P(a,b)=V**
		o	x=b	P(b,b)=V
		o	x=c	P(c,b)=V
y	z= c	$\exists x P(x,c)$ = V sii		
			x=a	**P(a,c)=V**
		o	x=b	P(b,c)=V
		o	x=c	P(c,c)=V

y $\exists x P(x,a) = V$

	x=a	**P(a,a)=V**
o	x=b	P(b,a)=V
o	x=c	P(c,a)=V

Conclusión

$\exists x \forall z P(x,z) = F$

	x=a	$\forall z P(a,z) = F$ sii		
			z=a	**P(a,a)=V**
		y	z=b	**P(a,b)=V**
		y	z=c	**P(a,c)=V**
o	x=b	$\forall z P(b,z) = F$ sii		
			z=a	P(b,a)=V
		y	z=b	P(b,b)=V
		y	z=c	P(b,c)=V
o	x=c	$\forall z P(c,z) = F$ sii		
			z=a	P(c,a)=V
		y	z=b	P(c,b)=V
		y	z=c	P(c,c)=V

Existe al menos un contramodelo (P(a,a)=V y **P(a,b)=V** y **P(a,c)=V), luego no hay consecuencia lógica.**

b) $\{\forall x P(x) \rightarrow Q(c)\} \models \exists x (P(x) \rightarrow Q(c))$

Premisas

$\forall x P(x) \rightarrow Q(c) = V$ sii

$\forall x P(x) = F$		sii	
		x= a	P(a) = F
	o	x= b	P(b) = F
	o	x= c	P(c) = F

o Q(c)=V

Conclusión

$\exists x(P(x) \rightarrow Q(c)) = F$ sii

x=a $\quad P(a) \rightarrow Q(c) = F$ sii

$P(a)=V$ y $Q(c)=F$

y x=b $\quad P(b) \rightarrow Q(c) = F$ sii

$P(b)=V$ y $Q(c)=F$

y x=c $\quad P(c) \rightarrow Q(c) = F$ sii

$P(c)=V$ y $Q(c)=F$

Analizamos las opciones:

Q(c)=V en la premisa es incompatible con Q(c)=F que se tiene que cumplir en todas las opciones de la conclusión.

P(a)=F en la premisa es incompatible con P(a)=V que debe cumplirse en la primera alternativa de la conclusión. P(b)=F en la premisa es incompatible con P(b)=V que debe cumplirse en la segunda alternativa de la conclusión. P(c)=F en la premisa es incompatible con P(c)=V que debe cumplirse en la tercera alternativa de la conclusión.

No es posible encontrar un contramodelo que haga simultáneamente verdaderas las premisas y falsa la conclusión, luego existe consecuencia lógica.